

隐含多项式曲线曲面拟合次数的确定研究

吴刚

(南京财经大学电子商务重点实验室 南京 210003)

(wugang69@sina.com)

Research on Degree of Fitting Implicit Polynomial Curves and Surfaces

Wu Gang

(Key Laboratory of Electronic Business, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003)

Abstract How to choose suitable degree of fitting implicit polynomial curves and surfaces is a key problem when the objects are described and recognized by implicit polynomials, but the problem is not solved in the theory. A theorem is presented to determine the degree of fitting implicit polynomials based on the object boundary features, and the formula for the degree of fitting implicit polynomial is given. From the theory, the algorithm for determination of the degree of implicit polynomials is followed: detecting the stationary points in the object boundary based on its features, and then calculating the minimum degree according to the formula derived from the theorem. In addition, the theory can be extended to three dimensional object. Finally, experiments are given to illustrate the efficiency and operation of the algorithm.

Key words implicit polynomial; curve; surface; fitting; degree

摘要 选用合适次数的隐含多项式曲线曲面描述目标物体是处理和识别目标物体的关键,因而需要在理论上解决隐含多项式曲线或者曲面的次数确定问题.根据目标物体本身的特征,从理论上得出隐含多项式曲线描述物体的次数确定定理,并给出了具体计算公式.该方法首先由给定物体边界的轮廓检测出其驻点数,然后根据驻点数得到拟合隐含多项式曲线方程次数的下界,进而推广到三维物体的隐含多项式曲面拟合次数的确定.最后给出的应用实例进一步验证了算法的有效性与可操作性.

关键词 隐含多项式;曲线;曲面;拟合;次数

中图法分类号 TP391.41

许多文献研究表明^[1-3],隐含多项式曲线对物体描述非常有效,与显式函数曲线、样条曲线以及其他描述方法相比具有许多优点,这主要是因为隐含多项式曲线可描述不规则的复杂形状物体,而且对数据噪音和模型的轻微变形不敏感,隐含多项式曲线能够填充由于物体的遮挡或变形所缺失的部分物体信息等.利用二次曲线来描述物体已得到广泛应用,而高次隐含多项式曲线由于比二次曲线有更强的描述复杂物体的能力,近年来越来越受到关注.

二元隐含多项式的形式为 $f_n(x, y) = \sum_{i, j > 0, i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$,其零集合 $\{(x, y) | f_n(x, y) = 0\}$ 是二维曲线方程,可以用来描述二维物体的形状.隐含多项式曲线就是隐含多项式函数的零集合,对二元隐含多项式函数,其零集合是曲线;对三元隐含多项式函数其零集合是曲面.

在平面图像进行边缘检测获得其边界轮廓以后,可以使用隐含多项式曲线 $f_n(x, y) = 0$ 对图像

收稿日期:2005-08-10;修回日期:2006-09-05

基金项目:江苏省普通高校自然科学研究计划基金项目(05KJB520032)

边界进行拟合, 以此进行图像的描述和识别. 拟合图像边界最简单的方法是寻求隐含多项式 $f_n(x, y)$, 使 $\sum_{(x_i, y_i) \in S} f_n^2(x_i, y_i)$ 最小, 这里 S 表示图像边界点的集合. 但是, 这种拟合效果很差, 原因是 $f^2(x_i, y_i)$ 并不是点 (x_i, y_i) 到曲线 $f_n(x, y) = 0$ 的距离, 因此很多文献又提出了各种形式的拟合方法^[4-5]. 显然, 物体图像的边界轮廓是封闭和有界的, 为了保证所得到的隐含多项式曲线是封闭有界的, 文献[6]等论文研究了在约束条件下隐含多项式曲线的拟合问题, 这种方法的基本思想就是寻找封闭有界隐含多项式曲线的条件, 在这种条件下对物体边界进行拟合.

无论选用什么方法拟合物体, 如何确定隐含多项式曲线的次数都是十分重要的. 对于复杂的物体, 若选用次数低的隐含多项式曲线进行拟合, 其拟合曲线难以反映物体边缘轮廓特征, 不可能有很好的拟合效果. 另一方面, 对于相对较为简单的物体, 如果选用高次数的隐含多项式曲线进行拟合, 将增加曲线拟合的难度, 更为重要的是使隐含多项式曲线难以处理而且难以运用, 同时高次数毕竟是一个相对概念, 究竟要选用多高次数仍然是一个模糊的问题, 因而从理论上给出选用次数的依据来解决这个问题就变得十分关键.

1 隐含多项式曲线次数的确定理论

Bezout 定理介绍: 如果 n 次二元多项式 $p_1(x, y)$ 与 m 次二元多项式 $p_2(x, y)$ 的零集合的交点个数多于 nm , 则一定有次数不超过 n 次也不超过 m 次的非零多项式 $q(x, y)$ 存在, 它是 $p_1(x, y)$ 与 $p_2(x, y)$ 的公因子.

Bezout 定理的证明可参考文献[7]. 显然该定理指出, 如果 n 次二元多项式和 m 次二元多项式没有公因子, 则它们的零集合至多有 nm 个交点.

Bezout 定理可以大致判定已知次数的隐含多项式曲线是否可以描述一个给定的物体边界. 假设给定一物体的边界轮廓 B , 若一条直线和该物体边界有 $k+1$ 个交点, 则该物体不可能用 k 次的隐含多项式曲线拟合. 这是因为直线用一次隐含多项式曲线描述, 根据 Bezout 定理, 显然 k 次的隐含多项式曲线和直线最多有 k 个交点, 不可能有 $k+1$ 个交点, 除非直线是 k 次隐含多项式的一个公因子.

应该指出, Bezout 定理对拟合隐含多项式次数的选择没有提供理论指导意义, 这是因为我们不知道物体的边界轮廓是多少次多项式的零集合, 也找

不到两个曲线来判断, 惟一知道的就是物体边界轮廓的特征, 但是, 我们可以根据物体边界轮廓特征构造两个曲线来应用 Bezout 定理, 以此解决拟合隐含多项式曲线的次数确定问题.

显然, 物体轮廓最为显著的特征就是驻点, 这里明确一下驻点的具体定义. 对一物体的边界轮廓用参数方程 $X = x(s)$, $Y = y(s)$ 描述, 其中 s 表示物体边界的轮廓长度, 称物体边界上 $x'(s)$ 为零, 但是 $y'(s)$ 不为零的点为驻点. 显然, 驻点可能是极值点, 也可能是拐点.

定理 1. 假设非退化的、封闭有界并且连通的正则隐含多项式曲线方程为 $f(x, y) = 0$, 它的一阶导函数曲线为 $g(x, y) = 0$, 则 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 没有公因子, 而且 $f(x, y)$ 的次数为偶数次多项式, $g(x, y)$ 为奇次数多项式.

证明 我们在文献[8-9]中指出, 非退化的隐含多项式曲线封闭有界的充分必要条件是隐含多项式曲线是偶次的, 因而 $f(x, y)$ 必定是偶次隐含多项式, 显然其一次导函数多项式一定是奇次的.

假设 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 有公因子 $r(x, y)$, 如果 $r(x, y)$ 为奇次的, 则 $r(x, y) = 0$ 为一条无界的曲线, 因而 $f(x, y) = 0$ 也是一条无界曲线, 这和已知 $f(x, y) = 0$ 是有界曲线相矛盾, 另一方面, 如果 $r(x, y) = 0$ 为偶次的, 那么说明 $f(x, y) = 0$ 是由两个封闭有界的曲线组成, 如果这两条曲线不相交, 就意味着 $f(x, y) = 0$ 是不连通的两条封闭曲线, 这和已知相矛盾, 如果这两条曲线相交, 则和 $f(x, y) = 0$ 是正则曲线相矛盾. 由此得出 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 没有公因子. 证毕.

定理 2. 设一物体的边界轮廓上有 k 个驻点, 则用来描述该物体边界所选用的隐含多项式曲线的次数不能低于 $(1 + \sqrt{1 + 4k})/2$.

证明 设可用 n 次隐含多项式曲线 $f(x, y) = 0$ 描述该物体轮廓. 由微分几何可知, 曲线上点的斜率函数为 $f_x(x, y)/f_y(x, y)$. 因为描述物体的隐含多项式曲线都是正则的, 因而 $f_y(x, y)$ 和 $f_x(x, y)$ 不可能同时为零, 从而曲线上的驻点可由下面的方程组给出:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

显然, 对于一个物体的边界轮廓而言, 必定是封闭的、有界的并且也是连通的, 因而 $f(x, y) = 0$ 也必然是封闭的、有界和连通的, 同时由定理 1 可知, $f(x, y)$ 和 $f_x(x, y)$ 没有公因子, 根据 Bezout 定理, 方程组(1)的根至多有 $n(n-1)$ 个, 即曲线 $f(x, y) = 0$

至多有 $n(n-1)$ 个驻点, 因而有:

$$n(n-1) \geq k. \tag{2}$$

解不等式(2)得 $n \geq (1 + \sqrt{1+4k})/2$. 即用来描述该物体边界曲线的隐含多项式的次数不能低于 $(1 + \sqrt{1+4k})/2$. 证毕

根据上面的定理可知, 当 $k=1$ 时, 隐含多项式次数 $n \geq 2$; 当 $2 < k \leq 12$ 时, 隐含多项式次数 $n \geq 4$; 当 $12 < k \leq 30$ 时, 隐含多项式次数 $n \geq 6$. 显然, 这种方法不仅仅提供隐含多项式曲线次数选取的一个下界, 实质上精确地指出了根据物体轮廓确定隐含多项式曲线拟合次数的方法. 同时应该指出, 对于同一个轮廓曲线, 无论其如何进行坐标变换都不影响其驻点的数目. 另一方面, 对于在 y 方向的导数为零的点不能算做驻点. 例如对于 $ax^2 + by^2 = r^2$ 无论做何种坐标变换, 关于 x 方向导数为零, 关于 y 方向导数不为零的点只能有两个, 因而根据定理 2, 选用的隐含多项式曲线的次数应该为 2 次. 显然, 这和实际情况是吻合的.

定理 2 指出了给定轮廓应该选用的隐含多项式曲线描述次数的下界, 通过分析可以观察到, 其上确界就是该轮廓应该选用的隐含多项式曲线的次数. 如果比这个次数再高, 也一定能描述该物体, 但是可能造成曲线方程的复杂和难以使用以及控制.

2 隐含多项式曲线次数的确定算法

根据第 1 节的讨论, 结合文献[10]中关于一阶差分值的计算算法, 可得拟合物体边界的隐含多项式曲线方程次数步骤如下:

1) 本文使用左拐弯技术获取物体轮廓的边界点(matlab6.5 的函数 bw boundaries 可以直接获得物体边界坐标), 得到按照一定顺序的边界点坐标后, 可以使用步长量化物体边界, 从而将其位置坐标形成长序列数组: $\{x(s), y(s), 1 \leq s \leq N\}$, 其中 s 为自然数, N 为边界点数.

2) 逐点计算边界点的 $x(s), y(s)$ 的一阶导数值. 由于物体边界封闭, 使用步长作为参数, 从而构造出曲线参数方程序列, 因此, 物体边界的一阶导数可用序列 $x(s), y(s)$ 的一阶差分来代替:

$$\begin{aligned} x'(s) &= x(s+1) - x(s), \\ y'(s) &= y(s+1) - y(s). \end{aligned}$$

考虑到 $x(s)$ 和 $y(s)$ 的一阶差分极易受噪声的干扰, 可以对序列的每一点取一个窗口, 对窗口中的每个 $x(s), y(s)$ 都做差分, 然后分别取其平均值, 再作为该点的斜率值, 即

$$\begin{aligned} x'_i(s) &= x(s+i) - x(s), \\ y'_i(s) &= y(s+i) - y(s), 1 \leq i \leq l, \\ K(s) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l [x'_i(s)/y'_i(s)]. \end{aligned}$$

在本文的实验中, 使用所求点后面的数个点差分均值作为该点的导数值, 因而实验中得到的驻点位置有所偏移, 这不妨碍本文算法的使用

3) 求每一点的斜率值. 把发生斜率符号改变的曲线点记为物体的驻点, 如果两个驻点间沿物体边界的曲线长度很小(一般取相对物体边缘长度的比率为阈值), 则合并为一点. 如果曲率符号没有改变, 但是其值接近 0, 也记为驻点. 如果 $y'(s)$ 为 0, 则该点不是驻点. 假设获得的驻点个数为 k .

4) 计算 $(1 + \sqrt{1+4k})/2$ 的值, 取不小于该值的最小偶数并记为 n , 则选取 n 次隐含多项式曲线来描述此物体

寻找物体边界轮廓的驻点是图像理解和计算机视觉领域的一个传统问题, 国内外许多文献提供了大量的算法, 本文驻点的计算是最为直接的一种方法. 驻点的寻找最为困难的就是噪声的影响, 但是由于本文隐含多项式曲线次数的确定仅仅关注的是驻点的个数, 因而对于驻点的位置并不考虑, 另外由于算法的容错性, 驻点个数的误差, 也就是计算所得的驻点数目和实际物体的驻点数目如果误差不大, 则对于隐含多项式曲线次数确定不会造成很大影响, 本文将在实验以及结论中做更为详细的讨论.

3 隐含多项式曲面次数的确定

三维物体使用隐含多项式曲面描述在计算机图形学、计算机视觉以及虚拟现实中有重要应用价值. 例如三维物体的消隐、空间物体的三维重建、虚拟现实以及医学图像三维复原等等. 上面定理很容易推广到使用隐含多项式曲面描述三维物体的次数确定问题

定理 3. 一个三维物体轮廓在 x, y, z 方向上分别有 l_1, l_2 和 l_3 个单位长度, 使用隐含多项式曲面 $f(x, y, z) = 0$ 拟合描述. 设该隐含多项式的次数为 d , 令 $f(x, y, a_i) = 0$ 的次数为 $l_i, f(x, b_j, z) = 0$ 的次数为 $m_j, f(c_k, y, z) = 0$ 的次数为 n_k , 其中 a_i, b_j, c_k 分别为三维物体在 z, y, x 方向上的离散点数目, 则有:

$$d \geq \max(l_1, l_2, \dots, l_{l_1}, m_1, m_2, \dots, m_{l_2}, n_1, n_2, \dots, n_{l_3}).$$

证明. 三维物体用隐含多项式曲面描述, 这个隐含多项式曲面一定是封闭的, 有界的, 正则的, 文

献[5]指出, 这种隐含多项式曲面的 x, y, z 的最高次项一定是相等的, 因而可以根据上面二次隐含多项式曲线次数确定定理给出 $f(x, y, z) = 0$ 和 x, y, z 方向任何一个平面相交获取的隐含多项式曲线的次数, 显然, 这些隐含多项式曲线的次数一定小于 $f(x, y, z) = 0$ 的次数, 从而上面定理成立. 证毕

应该指出, 直观分析应该是 $d = \max(l_1, l_2, \dots, l_{l1}, m_1, m_2, \dots, m_{l2}, n_1, n_2, \dots, n_{l3})$, 但是目前无法给出定理证明, 不能确定拟合次数的下确界, 因而需要进一步研究. 上面的定理给出一个三维物体轮廓使用 $f(x, y, z) = 0$ 拟合描述物体时所需要的次数

的下界, 这就为三维物体的隐含多项式曲面次数的确定提供了一定的依据.

4 实验与分析

本文使用 matlab6.5 编写程序实现了边界点追踪、差分值的求解、差分指纹图的绘制以及隐含多项式曲线的拟合. 图 1(a) 是一个心状物体, 图 1(b) 是用本文算法得到的物体边界点的一阶差分指纹图. 将相距较近的驻点合并为一点, 可以看出该物体应有 6 个驻点, 相应差分为零的点如图 1(c) 所示.

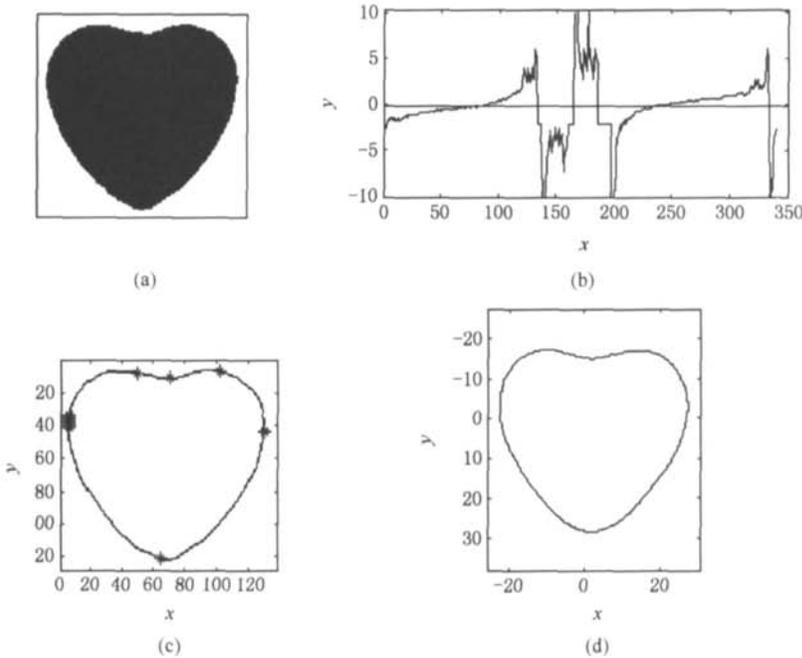


Fig. 1 Determination of degree of heart shape fitting curve. (a) Original image; (b) First order difference fingerprint; (c) Stationary points in the boundary; and (d) Fitting the heart shape with quartic curve

图 1 心状图曲线拟合的次数确定. (a) 原始图像; (b) 一阶差分指纹图; (c) 轮廓驻点; (d) 四次曲线拟合的心状图形

在图 1(c) 中, 求得的 6 个驻点使用“*”符号标记出来. 显然, 根据本文定理 2, 此处 $k = 6, (1 + \sqrt{1 + 4k})/2 = 3$, 因而选用的隐含多项式次数不能低于 3 次. 根据定理 1, 描述物体轮廓的隐含多项式曲线次数只能是偶次的, 故该心状图可以选用 4 次隐含多项式曲线进行拟合, 拟合的结果如图 1(d) 所示. 从拟合的图形上可以看出, 选用的次数是恰当的, 如果选用高于 4 次的曲线, 也可能较好地描述物体, 但是会造成描述曲线方程的复杂以及难以使用与控制.

仔细观察可以直观分析得出图 1(c) 最下面驻点有所偏移, 这是由于本文驻点计算算法的窗口选取没有以所求点为中心造成的, 因为我们仅仅希望

获得驻点个数, 对于驻点位置的要求不高, 因而这种偏差对算法结果不造成影响.

图 1(a) 实质也是一个三维心状体的一个剖面, 因而根据定理 3, 选用三元隐含多项式曲面拟合该实体时, 其次数不能低于 4 次, 由于曲面的复杂性, 4 次曲面是否一定能够描述该心状体还需要进一步研究.

图 2(a) 是一副飞机图像, 图 2(b) 是使用一阶差分算法求出的差分指纹图. 由于误差、像素点的点阵表示等, 造成连续相邻的几个点差分值都为 0, 此时需要适当判断, 组合成一个驻点. 观察图 2(b) 可以发现大约有 15 个点的一阶差分值点为 0, 图 2(c) 给出了这些点在飞机轮廓中的位置, 使用“*”号表示; 另一方面, 对于一阶差分值接近 0, 但是并没有

发现符号改变, 这个点显然是拐点, 图 2(d) 给出了极值点和拐点(拐点判断的阈值设置为 0.01)在飞

机轮廓的位置, 使用“*”表示, 显然可以观察到在飞机的机翼部分增加了两个点, 它们应该是拐点.

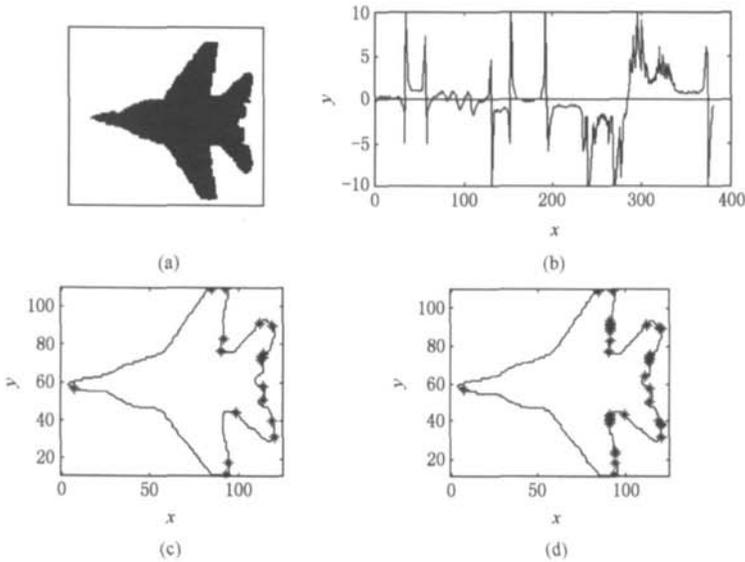


Fig. 2 Determination of plane shape fitting curve (a) Original image; (b) First order difference fingerprint; (c) Stationary points in the boundary (point of inflection threshold is 0); and (d) Stationary points in the boundary (point of inflection threshold is 0.01).

图 2 飞机图形曲线拟合的次数确定 (a) 原始图像; (b) 一阶差分指纹图; (c) 轮廓驻点图(拐点阈值取 0); (d) 轮廓驻点图(拐点阈值取 0.01)

通过图 2(d) 可以发现飞机的轮廓大约有 17 个驻点, 也就是 $k=17$, 那么 $(1 + \sqrt{1+4k})/2 = 4.653 \approx 5$, 根据定理 1, 描述物体轮廓的隐含多项式曲线次数只能是偶次的, 因而对于该飞机轮廓需要使用 6 次隐含多项式曲线进行拟合, 文献[11]使用六次隐含多项式曲线对该飞机图形进行拟合, 拟合的效果很好, 具体拟合的图形可以参考该文献

5 结 论

本文提出了根据物体边界轮廓特征确定拟合隐含多项式曲线次数的方法, 给出严格定理证明, 指出隐含多项式曲线次数 $n \geq (1 + \sqrt{1+4k})/2$, 其中 k 为物体轮廓驻点的个数. 需要指出的是对于物体轮廓一阶导数的计算非常容易受物体噪声的影响, 本文没有对物体边缘的噪声去除做深入探讨. 事实上, 只要使用神经网络等技术对物体边缘做预处理, 可以获得较为理想的光滑的物体边缘. 另一方面, 由于图像的像素点采用矩阵表示的特点, 尽管本文算法已经使用均值处理方法, 仍然经常出现连续几个点计算出的一阶导数值相等, 显然这需要将它们合并为一个点.

本文对于三维物体的隐含多项式曲面的拟合次

数确定仅仅做了简单的推广, 具体更为简洁的算法或者理论推导还需要深入的研究和探讨.

参 考 文 献

- [1] P D Sampson. Fitting conic section to very scattered data: An interactive improvement of the book Stein algorithm [J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1982, 18(1): 97-108
- [2] G Taubin. Estimation of planar curves, surfaces and nonplanar space curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(11): 1115-1138
- [3] J Subrahmonia, D Cooper, D Kenren. Practical reliable Bayesian recognition of 2D and 3D objects using implicit polynomials and algebraic invariants [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 18(5): 505-519
- [4] D Keren, D Cooper, I Subrahmonia. Describing complicated objects by implicit polynomial [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(1): 38-53
- [5] Z Lei, D Cooper. Linear programming fitting of implicit polynomials [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(2): 212-217
- [6] G Taubin, F Cukirman, S Sullivan, et al. Parameterized families of polynomials for bounded algebraic curve and surface fitting [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(3): 286-303

- [7] P Griffiths. Algebraic Curves [M]. Beijing: Peking University Press, 1985 (in Chinese)
(P 格列菲斯 代数曲线[M]. 北京: 北京大学出版社, 1985)
- [8] Wu Gang, Li Daolun. Object recognition based on affined invariants in implicit polynomial curves [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(12): 1987-1991 (in Chinese)
(吴刚, 李道伦 基于隐含多项式曲线仿射不变量的目标识别[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 1987-1991)
- [9] Wu Gang, Li Daolun. Object representation and symmetry detection based on implicit polynomial curves [J]. Journal of Computer Research and Development, 2002, 39(10): 1337-1344 (in Chinese)
(吴刚, 李道伦 基于隐含多项式曲线的物体描述与对称性检测[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1337-1344)
- [10] Wen Wei, Yuan Baozong. Inclined symmetry axis detection for closed curves [J]. Journal of Communications, 1996, 17(2): 33-37
- [11] W A Wolovich, M Unel. The determination of implicit polynomial canonical curves [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(10): 1080-1090



Wu Gang, born in 1969. Ph. D. His research interests include pattern recognition and artificial intelligence.

吴刚, 1969年生, 博士, 主要研究方向为模式识别、人工智能

Research Background

The work in this paper is supported by the High School National Science Project of Jiangsu Province under grant No. 05KJB520032.

There are many techniques available to describe object boundaries, such as Fourier descriptors and B splines, but implicit polynomials have many merits compared with them, for example, the capability to describe irregularly shaped objects by a small number of parameters; object recognition by checking to see whether a data set is well fit by a specific implicit polynomial; the coefficients of these polynomials, when fit to data, appear to be relatively insensitive to noise or to modest changes in the subset of the boundary used. Obviously, it is a key problem to choose the degree of the fitting implicit polynomials. The objects cannot be described accurately if the choosing degree of the fitting implicit polynomials is too low. On the contrary, the fitting implicit polynomial curves are difficult to use to recognize the object if the choosing degree of them is too high. Currently, the degrees of the fitting implicit polynomials are chosen baselessly. This paper presents a theorem to determine the degree of fitting implicit polynomials, and the formula for degree of fitting implicit polynomial.